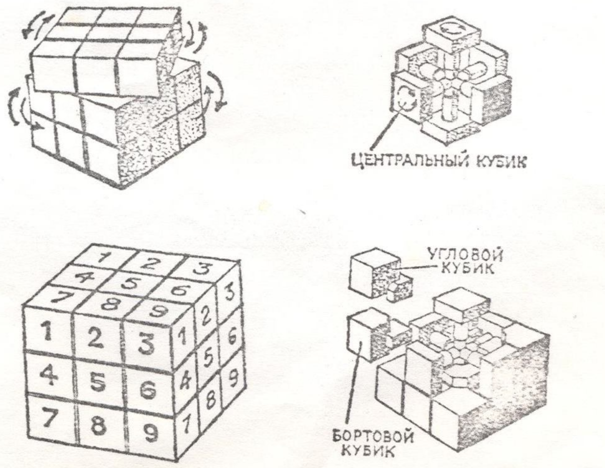
● ПСИХОЛОГИЧЕСКИЙ ПРАКТИКУМ

Тренировка терпения, геометрического воображения и умения мыслить логически

ВЕНГЕРСКИЙ КУБИК



Читатели журнала знакомы с головоломкой «Кубики для всех» (см. «Наука и жизнь»№ 3, 1963 г.), которая позволяет из 7 асимметричных элементов, склеенных из 27 маленьких кубиков, многими способами сложить куб 3×3×3.

Головоломка «Флексагон» («Наука и жизнь» № 2, 1970 г.) увлекла многих читателей неисчерпаемыми возможностями вариантов перемены плоскостей и способов вращения и «выворачивания», флексагонов различных конструкций.

Головоломка, изобретенная Эрнё Рубиком-младшим, преподавателем Высшей школы декоративного искусства в Будапеште, соединила в себе, казалось бы, несоединяемое — получился своеобразный гибрид флексагона и кубика.

Представьте себе куб 3×3×3, составленный из 27 маленьких кубиков. Вы берете его в руки и поворачиваете, например, верхнюю грань — 9 кубиков — на четверть оборота, то есть на 90°. Затем так же поворачиваете правую грань, левую и т. д. Вроде бы ничего особенного. Затем вы удивляетесь: как же так — каждая грань оборачивается вокруг себя, вокруг оси, проходящей через ее центр, маленькие кубики переползают с места на место, путешествуют по всему кубу, а он — куб то есть — при этом не распадается. Попытки выковырнуть какой-либо кубик ни к чему не приводят: все вращается, но не разнимается!

Грани куба окрашены. Шесть граней — шесть цветов. На каждой грани, таким образом, видны 9 одноцветных квадратиков. Но стоит повернуть грани наугад несколько раз, как все цвета перепутываются. Попытки восстановить первоначальное расположение кубиков в кубе приводят, как в аномальном флексагоне, к еще большей неразберихе. И немудрено: число возможных вариантов взаимного расположения элементарных кубиков в этом кубе более 43 квинтильонов, то есть более 43 10^{18}. Простой подсчет показывает: если переходить от одного варианта расположения к другому за 1 микросекунду, то для того, чтобы исчерпать их все, не повторяясь, потребовалось бы около 1,5 миллиона лет. Тем не менее говорят, что изобретатель возвращает свой кубик из любого хаотического цветосочетания в первоначальный вид за 2 минуты 10 секунд.

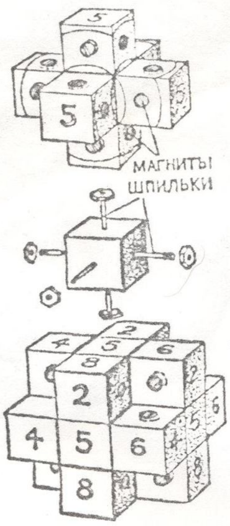
Профессор Лондонского политехнического института Д. Сингмайстер считает, что человек, не знающий алгоритма, но достаточно одаренный способностью логически мыслить, может (при условии ежедневной упорной работы) упорядочить хаотическое расположение кубиков за две недели.

С быстротою слухов головоломка распространилась по странам Европы. Знаменитые фирмы игрушек приобрели лицензии на производство головоломки. Пассажиры в метро и электричках, студенты на лекциях, школьники на уроках и просто так, в минуты отдыха крутят в руках разноцветные кубики.

Свойства куба Рубика имеют непосредственное отношение к математической теории групп и комбинаторике. Это обстоятельство заинтересовало и специалистов. Нет, не возможностью открыть что-то новое в науке, просто специалисты высоко оценили головоломку и не преминули приложить к ней свои знания. Профессора математики, инженеры-программисты, любители разрабатывают алгоритмы, составляют машинные программы для поиска кратчайших путей упорядочения кубика. С некоторыми находками мы познакомим читателей журнала в этой статье.

Но прежде всего о том, как устроен куб Эрнё Рубика. Основа куба — жесткий каркас, крестовина, к которой прикреплены на винтах центральные «кубики», их шесть, по числу граней. Они могут вращаться, как показано на рисунке, вместе с гранью, которая вращается заодно с центральным кубиком данной грани. Восемь угловых и двенадцать реберных кубиков могут перемещаться благодаря хитроумно устроенным шипам.

Куб фабричного производства выполнен из прочной достаточно эластичной пласт-



массы. Не знаем, удастся ли кому сделать такой куб в домашних условиях, но если кто придумает технологию или конструкцию для самостоятельного изготовления, просим поделиться опытом с другими читателями. Для исследовательских целей, конечно, хорошо иметь куб легко разбирающийся, как, например, флексагон на платяных кнопках, чтобы не мучить себя при сбое. Вот одна из возможных опытных конструкций. Для нее можно использовать детские деревянные кубики, железные пластинки и магниты от магнитных шашек или шахмат. Потребуется 27 кубиков. В центральном кубике закрепляются 6 шпилек-осей для центральных кубиков граней. Остальные кубики будут удерживаться при поворотах граней парами: магнит — железная пластинка. Куб не будет таким прочным, как фабричный, но весьма удобным для исследования его свойств. В любой момент его можно легко разобрать и вернуть в исходное состояние.

Между тем мы надеемся, что эту венгерскую головоломку, мгновенно получившую большое распространение во многих странах, можно будет купить и в наших магазинах игрушек

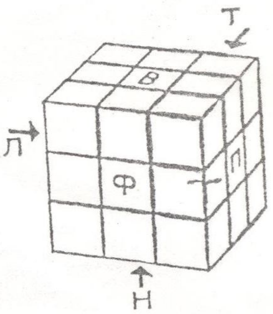
Поэтому мы дадим несколько советов, имея в виду не только тех читателей, кто сам построит такой куб, но и тех, у кого он уже имеется и кто захочет заняться исследованием его удивительных свойств, заняться поиском алгоритма решений.

Обозначим 6 граней куба буквами ф, т, л, п, в, н — начальными буквами слов фасад, тыл, левая, правая, верх, низ. Тогда каждый кубик может быть обозначен вполне определенно. Центральные кубики — одной малой буквой, соответствующей обозначению грани, а именно ф, т, л, п, в, н. 12 реберных кубиков — двумя буквами, поскольку каждый из них принадлежит двум граням. Например, фп — кубик, принадлежащий фасадной и правой граням, лн — левой и нижней и т. д. Восемь угловых кубиков, или просто углов,— тремя буквами: фвп, фпн, флн, флв, лвт, пвт, птн и лтн.

Прописными буквами условимся обозначать элементарные операции — повороты соответствующей грани на четверть оборота, то есть на 90°. Так, буква П означает поворот правой грани на 90° по часовой стрелке, сочетание ПФПВ символизирует процесс, включающий следующие элементарные операции: поворот последовательно граней правой, фасадной, снова правой и, наконец, верхней. Символика $П^2ФП^{-1}Ф^{-1}$ означает: повернуть дважды на 90° по часовой стрелке правую грань куба, затем фасадную на 90°, затем правую грань на 90° против часовой стрелки и закончить операцию поворотом фасадной грани на четверть оборота против часовой стрелки.

Несколько последовательно проведенных элементарных операций, результатом которых будет перевод куба из одного состояния в другое, будем называть процессом, или просто операцией. Более крупная операция, или процесс наряду с элементарными операциями может включать в себя менее крупные операции (см например, А4 на стр. 133).

Обратите внимание: серия поворотов ФЛВ приводит к иному результату, нежели ФВЛ. Поворот любой грани на четверть оборота по часовой стрелке дает такой же результат, что и поворот



на 270° в обратную сторону. Поворот на пол-оборота вправо (два шага направо) равнозначен повороту на пол-оборота влево. Поворот грани на 360° ничего не меняет. $ФЛВ \neq ФВЛ$. $П = П^{-3}$. $ПП = П^2 = П^{-2}$; $ППП = П^3 = П^{-1}$. $П^4 = i$. $П^2П^{-2} = ПП^{-1} = i$.

Предположим, что в исходном, упорядоченном положении грани куба расположились так: вверху — красная, фасад — зеленый, левая — белая, низ — оранжевый, а тыльная грань — синяя. Говорим: куб ориентирован, при этом каждый элементарный кубик занимает место, отведенное ему, и только ему.

Можно пронумеровать цифрами от 1 до 9 кубики на каждой грани куба. В центре каждой грани куба будет цифра 5. Угловые кубики будут нечетные: 1, 3, 7, 9, реберные — четные: 2, 4, 6, 8. Практически это удобно сделать, налепив на кубики кусочки белого аптечного лейкопластыря.

Эта маленькая хитрость поможет на первых порах изучить свойства кубика и пользоваться алгоритмами, приведенными ниже, если цвета граней не подобраны. Вы наклеиваете на кубики кусочки лейкопластыря, 54 налепки — по числу граней кубиков — и пишете на них цветными карандашами или чернилами цифры, на каждой грани своим цветом в соответствии с цветом центрального кубика. Если собьетесь и не сможете вернуть куб в исходное положение, то нетрудно будет переклеить налепки по-новому.

Заметим, что угловые кубики при любых поворотах граней всегда остаются угловыми, а бортовые—бортовыми. Иначе говоря, нечетные номера занимают нечетные места, а четные — четные. Центральные кубики, определяющие грань, могут из-за вращения лишь менять взаимную ориентацию, но не могут перемещаться один относительно другого. Чтобы собрать одноцветную грань, надо вокруг центрального элемента, кубика № 5, собрать восемь других того же цвета. Все перестановки обратимы. Даже после 200 поворотов можно вернуться к начальному положению, повторив те же движения, но в обратном порядке с переменой знака вращения.

Теперь несколько алгоритмов перевода куба из одного положения в другое: они пригодятся вам для решения общей задачи упорядочения.

Операция (процесс) «угол». Она позволяет перемещать угловые кубики

$$ФПФ^{-1}П^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A1)$$

Для нижней и правой грани этот алгоритм записывается так:

$$Н^{-1}П^{-1}НП \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A1')$$

Забавное мнемоническое правило для запоминания алгоритмов дает венгерский журнал «Элет эш тудомань» («Наука и жизнь»). Оно позволяет также обойтись без степеней и знаков минус в написании алгоритмов. Попробуем переложить его на русский лад. Вы поймете, в чем дело, если вышеприведенный алгоритм будет записан так: фа пра фао прао. Здесь — фа — фасад, пра — правая грань, фао — фасад, обратное вращение — прао — правая грань, обратное вращение.

Некоторые алгоритмы были выражены шуточными стихами. Можно попытаться это сделать и по-русски этакими «кудреватыми мудрейками». Например, алгоритм А9, по которому нижний бортовой кубик правой грани перемещается наверх, можно записать так:

Лéо пра фао
Лѐ прао ни —
Снизу и справа
Наверх гони!

Или процесс А14, перемещающий наверх кубик из среднего ряда:

Лео, фáо, ле прáо
Средний кубик — **«ни прá»**
Что за шутки? Здесь, право,
Просидишь до утра!

Двойной поворот (поворот на 180°) в слоговой шифровке отмечается слогом «ди» или словом «два».

Скажем, алгоритм А12, переворачивающий пять кубиков, записывается так:

Фа вѐ фади́
Ле фá леди́
Ве лѐ веди́ —
Верти — крути!

Если операцию А1 повторить трижды, то есть

$$(ФПФ^{-1}П^{-1})^3 \quad . \quad . \quad . \quad (A2),$$

то в результате две пары углов (флв, фвп) и (пнт, фнп) поменяются местами с изменением ориентации, а все остальные останутся на местах. Операция «угол», повторенная дважды, приводит к начальной позиции, то есть

$$(ФПФ^{-1}П^{-1})^6 = i \ldots \quad (A2')$$

Операция «борт». Она проста для запоминания и весьма эффективна,

$$(Ф^2П^2)^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A3)$$

Здесь также двойная перестановка: меняются местами бортовые кубики (фв, фн) и (пв, пн). Так же как и в предыдущем случае, операция «борт», повторенная дважды, возвращает куб в исходное положение

$$(Ф^2П^2)^6 = i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A3')$$

Комбинируя операции «угол», («угол»)² и «борт», можно привести в порядок все 6 граней «расстроенного» куба не более чем за 277 поворотов граней, как утверждает проф. Д. Сингмайстер. Для этого надо:

1. Поставить на свои места угловые кубики какой-либо грани, то есть упорядочить расположение всех нечетных номеров одной грани (скажем, нижней). Особых приемов для этого не дается.

2. Повернуть грань так, чтобы цвет угловых кубиков совпал с цветом боковых граней (для нижней грани это поворот $Н, Н^2$ или $Н^{-1}$).

3. Сделать много раз «угол», чтобы придать правильное положение четырем угловым кубикам противоположной грани по цвету.

4. Сделать много раз («угол»)², чтобы правильно ориентировать угловые кубики этой грани.

5. Сделать много раз «борт», чтобы расположить и правильно ориентировать реберные кубики.

В процессе восстановления порядка может возникнуть необходимость выполнить перестановку двух кубиков в пределах одной грани, например (вл, вп) (вф, вт). Ее можно осуществить следующим образом: сначала сделать три шага, приводящих к возможности применить операцию «борт» к двум граням (для нашего примера правой и верхней), провести ее и повторить тройной ход, но в обратном направлении:

$$ФТ^{-1}В(П^2В^2)^3В^{-1}ТФ^{-1} \quad (A4)$$

Вообще говоря, невозможно не только удержать в памяти, но и осмысленно применять перестановки, затрагивающие сразу несколько пар кубиков. Поэтому разрабатываются многоходовые комбинации, позволяющие переместить или переориентировать не более двух, в крайнем случае трех пар кубиков.

Вот несколько алгоритмов подобных перестановок.

А5. Циклическая перестановка трех кубиков, расположенных буквой Т на трех гранях.

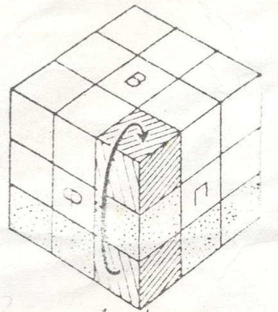
$$В^{-1}ЛП^{-1}Ф^2ПЛ^{-1}В^{-1} \quad . \quad (A5)$$

А6. Попарное изменение ориентации реберных кубиков. Эта двадцатиходовка, включающая в себя 14 операций — поворотов, разработана с помощью ЭВМ М. Тэйстлетуайтом. Все остальные кубики сохраняют свое положение и ориентацию.

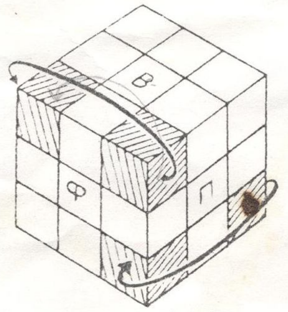
$$П^2Ф^2П^2Ф^{-2}ПВ^{-1}П^2ВФ$$
$$ПВФ^2В^{-1}Ф \quad . \quad . \quad (A6)$$

А7. Циклическое перемещение трех угловых кубиков (программа Р. Пенроуза) за 8 поворотов. На противоположных гранях нижний и правый кубики остаются на местах.

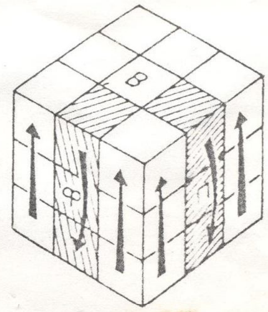
$Л^{-1}В$ [illegible] $П$ [illegible] $В$ [illegible] $В$ [illegible] $ПВ$. (A7)



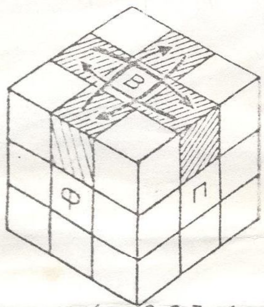
A1 $Н^{-1}П^{-1}НП$



A2 $(ФПФ^{-1}П^{-1})^3$

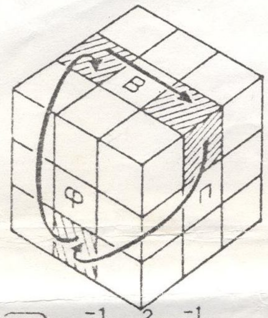


A3 $(Ф^2П^2)^3$



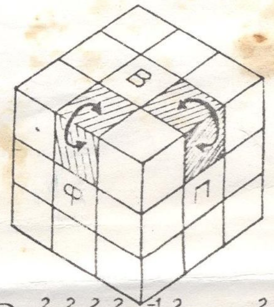
A4 $ФТ^{-1}В(П^2В^2)^3В^{-1}ТФ^{-1}$

$\begin{cases} \dot{в}л \rightleftarrows \dot{в}п \\ \dot{в}ф \rightleftarrows \dot{в}т \end{cases}$



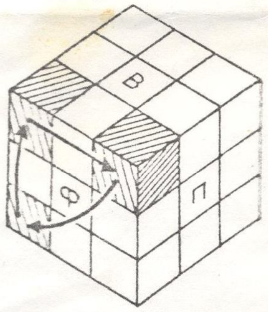
A5 $ВП^{-1}ЛФ^2ПЛ^{-1}В$

$\begin{cases} \dot{ф}н \to \dot{в}л \to \dot{в}п \\ в\dot{п} \to \dot{ф}н \end{cases}$



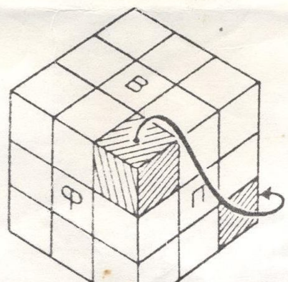
A6 $П^2Ф^2П^2Ф^2ПВ^{-1}П^2ВФПВФ^2В^{-1}Ф$

$\dot{ф}в \to ф\dot{в}$



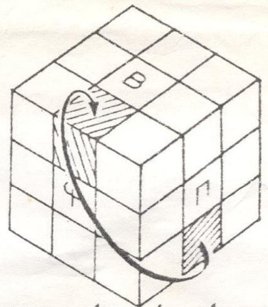
A7 $Л^{-1}В^{-1}П^{-1}ВЛВ^{-1}ПВ$

$\dot{ф}вл \to \dot{ф}вп \to \dot{ф}лн \to \dot{ф}вл$



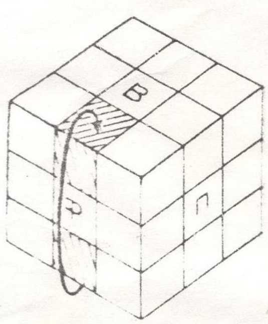
A8 $ФН^2Ф^{-1}Н^{-1}$

$ф\dot{в}п \to пн\dot{т}$



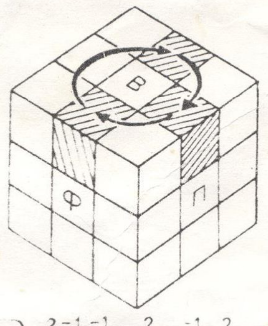
A9 $Л^{-1}ПФ^{-1}ЛП^{-1}Н$

$\dot{п}н \to ф\dot{в}$



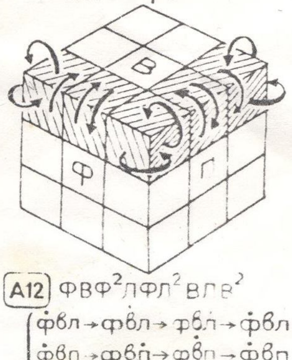
A10 $П^{-1}ПФ^2Л\ П^{-1}Н^2$

$ф\dot{н} \to ф\dot{в}$



A11 $П^2Н^{-1}Л^{-1}ПВ^2ЛП^{-1}Ф^2НП^2$

$\begin{cases} ф\dot{в} \to т\dot{в} \to п\dot{в} \to ф\dot{в} \\ \dot{ф}в \to \dot{т}в \to \dot{п}в \to \dot{ф}в \end{cases}$



A12 $ФВФ^2ЛФЛ^2ВЛВ^2$

$\begin{cases} \dot{ф}вл \to ф\dot{в}л \to фв\dot{л} \to \dot{ф}вл \\ \dot{ф}вп \to фв\dot{п} \to ф\dot{в}п \to \dot{ф}вп \\ \dot{п}тв \to пт\dot{в} \to пт\dot{в} \to \dot{п}тв \\ \dot{ф}в \to ф\dot{в} \to \dot{ф}в \\ \dot{п}в \to п\dot{в} \to \dot{п}в \end{cases}$

А8. Перемещение углового кубика по диагонали с нижней грани на верхнюю (и наоборот) с изменением ориентации. Например, перемещение кубика **фнл** в угол **фвп**.

$$ФН^{2}Ф^{-1}Н^{-1} \quad . \; . \; . \; . \quad (А8)$$

и обратный ход

$$НФН^{2}Ф^{-1} \quad . \; . \; . \; . \quad (А8')$$

Естественно, если вам надо переместить другой кубик, то куб следует ориентировать так, чтобы фасадной стала нужная грань. Например, чтобы воспользоваться указанной записью для перемещения кубика **фнп** на место **впт**, нужно повернуть куб нижней гранью вперед. А можно и переписать алгоритм, не меняя ориентации куба. В данном случае так:

$$НТ^{2}Н^{-1}Т^{-1} \quad . \; . \; . \; . \quad (А8'')$$

А9. **При подборе верхней грани, особенно при установке последнего бортового кубика, бывает необходимо взять его так, чтобы остальные кубики верхней грани оставались на месте. Если нижний кубик занимает место пн (или фн, лн, тн — из этих положений его легко поворотами Н, Н² поставить в положение пн), то применяют процесс**

$$Л^{-1}ПФ^{-1}ЛП^{-1}Н \quad . \; . \quad (А9)$$

Он затрагивает лишь пять бортовых кубиков, причем четыре из них принадлежат нижней грани. Все остальные кубики остаются на своих местах.

А10. **Этот алгоритм позволяет переместить нижнюю грань кубика фн наверх и правильно ориентировать его.**

$$Л^{-1}ПФ^{2}ЛП^{-1}Н^{2} \quad . \; . \quad (А10)$$

Процесс **А10** затрагивает всего лишь три бортовых кубика: **фв, фн** и **тн.**

А11. Циклическая перестановка трех бортовых кубиков, принадлежащих одной грани. Все другие кубики остаются на своих местах.

$$П^{2}Н^{-1}Л^{-1}ПВ^{2}ЛП^{-1}Ф^{2}НП^{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (А11)$$

А12. Данный алгоритм, рассчитанный Д. Бенсоном из Кембриджа, применяется для переориентации кубиков верхнего слоя. Два бортовых кубика, оставаясь на месте, меняют цвет, а три угловых кубика, также оставаясь на своих местах, вращаются против часовой стрелки.

$$ФВФ^{2}ЛФЛ^{2}ВЛВ^{2} \quad . \; . \quad (А12)$$

Попарная ориентация угловых кубиков, расположенных на одной грани за 14 операций (И. Часар).

$$П^{-1}НПФНФ^{-1}В^{n}ФН^{-1}Ф^{-1}П^{-1}Н^{-1}ПВ^{-n} \quad . \; . \; . \quad (А13)$$

$n=1, 2, 3$ выбираем так, чтобы операцией В другой «плохой» кубик был помещен в верхний правый угол противоположной грани.

А14. Этот алгоритм дополняет операции А9 и А10 и применяется, если бортовой кубик расположен в среднем слое справа, то есть занимает положение **фп.** В результате данный кубик переходит на место **фв.**

$$Л^{-1}Ф^{-1}ЛП^{-1}НП \quad . \; . \quad (А14)$$

Процесс затрагивает также три бортовых кубика нижней грани (**фн, лн, тн**).

А15. **Перестановка двух противоположных реберных кубиков (фв, вт) на верхней грани куба. Одновременно меняются местами и кубики фн и тн на нижней грани (см. рис. на 4-й странице обложки)**

$$(Л^{2}П^{2}Н^{2})^{2}В^{2}Н^{2} \quad . \; . \quad (А15)$$

Маркировка кубиков цифрами с помощью лейкопластыря позволяет заметить, что кубики фв и вт, то есть кубики № 8 и № 2 верхней грани, в процессе А15 не просто меняются местами: при этом переворачивается весь средний столбец вместе с центральной пятеркой. Если центральный кубик не маркирован, то изменение его ориентации остается незамеченным, поскольку она не оказывает влияния ни на расположение, ни на ориентацию других кубиков.

Маркировка позволяет заметить, что в процессе А3 также переворачиваются два столбца (средний столбец фасадной грани и средний столбец правой грани), а в процессе А4 — средний столбец и средняя строка верхней грани.

На 4-й странице обложки нарисован куб, в котором цвета маленьких кубиков на гранях куба чередуются в шахматном порядке. Он получен с помощью процесса, включающего в себя три 12-ходовых операции

$$(П^{2}Т^{2}Л^{2}Ф^{2})^{3} \; (П^{2}В^{2}Л^{2}Н^{2})^{3} \; (В^{2}Т^{2}Н^{2}Ф^{2})^{3} \quad . \; . \; . \quad (А16)$$

или, если хотите, одну элементарную операцию $П^2$, повторенную 36 раз, но при этом необходимо выполнить соответствующее вращение куба вокруг осей x, y, z

$$(П^{2}z)^{12}\, x\, (П^{2}z)^{12}\, y\, (П^{2}z)^{12} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (А16')$$

где x, y, z — элементарная операция поворота всего куба на 90° вокруг соответствующей оси.

Этот пример говорит о возможности перевода куба в наперед заданное состояние, то есть о возможности поставить задачу: расположить цветные кубики в кубе так, чтобы на гранях получился определенный узор. Конечно, начальное состояние куба при этом в отличие от задачи упорядочения не должно быть хаотическим — грани должны быть подобраны по цвету.

Интересные алгоритмы, присланные читателями, будут опубликованы.

Наши читатели знакомы с различными пасьянсами: карточными, цифровыми, домино-пасьянсами. Венгерский кубик — это, по сути дела, еще один вид пасьянса — на кубиках. Пасьянс очень сложный, с правилами допустимых перестановок, содержащимися в самом устройстве куба, подчиняющимися математическим законам, которые можно понять и успешно применять, решая ту или иную головоломную задачу перемещения.

Напомним, что слово «пасьянс», предполагающее у нас вполне определенный вид логических задач-головоломок, в первооснове своей означает «терпение» (patience, по-французски) и тот, кто захочет испытать свое терпение, в полной мере определит его степень, занявшись венгерским кубиком

И. Константинов.